845. Stationary distribution ヲモツ Markoff Process ニツイテ II.

角谷 静夫 (阪大)

§3

M(φ) ニ於ケル Birkhoff ノ ergodic theorem ヲ証明スルタメ先ヅ Infinite product space Ω^* ヲ考ヘコヽニ completely additive ナ measure $\varphi^*(E)$ ヲ導入スル.

$$\Omega^* = \prod_{-\infty}^{+\infty} \Omega \text{ ハ } t^* = \left\{ \overset{(i)}{t_i} \right\} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots) \text{ ナ}$$

ル点列 t^* ヲ要素トスル空間デ t_i ハ Ω ノ任意ノ点デ t_i.

ノ上ニ書イタ記号(i)ハt_iガt^*ノ第i番目ノ坐標デアルコトヲ示ス。（座標iハ$-\infty$カラ$+\infty$マデアルコトニ注意）。記号的ニ$\Omega^* = \cdots\cdots \overset{(-2)}{\Omega} \times \overset{(-1)}{\Omega} \times \overset{(0)}{\Omega} \times \overset{(1)}{\Omega} \times \overset{(2)}{\Omega} \times \cdots\cdots$ト云フ風ニ表ハスコトニスル。次ニ$\Omega^*$ノ部分集合$E^*$ニテ

$$E^* = \cdots\cdots \times \overset{(m-2)}{\Omega} \times \overset{(m-1)}{\Omega} \times \overset{(m)}{E_m} \times \overset{(m+1)}{E_{m+1}} \times \cdots\cdots \times \overset{(n)}{E_n} \times \overset{(n+1)}{\Omega} \times \overset{(n+2)}{\Omega} \times \cdots\cdots$$

ト云フ形ノモノヲ考ヘル。即チE^*ハ$t_i \in E_i,\ m \leqq i \leqq n$ニテ$t_i \in \Omega,\ i \leqq m-1,\ i \geqq n+1$ナル如キ点列$t^* = \{\overset{(i)}{t_i}\}\ (i = 1, 2, \cdots\cdots)$全体ノ集合デアル。コレハ又記号的ニ$E^* = \overset{(m)}{E_m} \times \overset{(m+1)}{E_{m+1}} \times \cdots\cdots \times \overset{(n)}{E_n}$ト書クコトモ出来ル。

ココニ$E_i\ (m \leqq i \leqq n)$ハΩノ Borel 集合デm, nハ$-\infty < m \leqq n < \infty$ヲ満足スル正又ハ負ノ整数デアル。

カカル形ノ集合E^*全体ノ family $\mathcal{E}^*$ヲ考ヘ、

$$F^* = \sum_{i=1}^{n} E_i^*,\quad E_i^* \cdot E_j^* = 0\ (i \neq j),\quad E_i^* \in \mathcal{E}^*\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ナル形ノ集合F^*全体ノ family ヲ$\mathcal{F}^*$ニテ表ハス。今$\varphi^*(E^*)$及ビ$\varphi^*(F^*)$ヲ

$$\varphi^*(E^*)$$

$$= \int_{E_m}\int_{E_{m+1}} \cdots\cdots \int_{E_n} \varphi(dt_m) P(t_m, dt_{m+1}) P(t_{m+1}, dt_{m+2}) \cdots\cdots P(t_{n-1}, dt_n)$$

$$\varphi^*(F^*) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^*(E_i^*)$$

ニヨッテ定義スレバ $\varphi^*(F^*)$ ハ明カニ $\mathfrak{F}^*$ ニテ定義サレタ finitely additive ナ measure デ且ツ $\varphi^*(\Omega^*)=1$ ヲ満足スル。

シカモ A. Kolmogoroff—T. L. Doob[1] ノ論法ニヨリ $\varphi^*(F^*)$ ハ又 $\mathfrak{F}^*$ ニ於テ completely additive ニナッテ井ルコトガワカル。

即チ $F_n^*\in\mathfrak{F}^*$, $F^*\in\mathfrak{F}^*$, $\sum_{n=1}^{\infty}F_n^*=F^*$, $F_m F_n=0$

$(m\neq n)$ デアレバ $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^*(F_n^*)=\varphi^*(F^*)$ トナル。ヨッテ、ヨク知ラレタ方法ニヨリ[2] $\varphi^*(F^*)$ ハ $\mathfrak{F}^*$ ヲ含ム最小ノ Borel family $B(\mathfrak{F}^*)$ ニマデ completely additive ニ拡張出来ル。

今 Ω^* ニ於ケル translation $t^*\to S(t^*)=t^{*\prime}$,

$t^*=\left\{t_i^{(i)}\right\}$, $t^{*\prime}=\left\{t_{i+1}^{(i)}\right\}$, $(i=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$ ヲ考ヘレバコノ $S(t^*)$ ハ容易ニワカル如ク φ^*-measure

---

(1) A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Math.
J. L. Doob: Stochastré processes with an integral valued parameter, Irom. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 87-150

(2) 例ヘバ E. Hopf: Ergodentheorie, P. 2-3.

preserving デアル。

次ニ Ω^* ニ他ノ種類ノ measure ヲ導入スル．コノタメ．Ω^* ノ部分集合 E^* ニテ $E^* = \overset{(m)}{E}_m \times \overset{(m+1)}{E}_{m+1} \times \cdots \times \overset{(n)}{E}_n$（但シ $1 \leqq m \leqq n < \infty$）ナル形ノモノ全体が作ル family $\overline{\mathcal{E}}^*$ ヲ考へ更ニ $F^* = \sum_{i=1}^{n} E_i^*$, $E_i^* \cdot E_j^* = 0$ $(i \neq j)$。$E_i^* \in \overline{\mathcal{E}}^*$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ ナル形ノ F^* 全体ノ family $\overline{\mathfrak{F}}^*$ ヲ考ヘル．任意ノ $E^* \in \overline{\mathcal{E}}^*$, $F^* \in \mathfrak{F}^*$ ニ對シテ

$$\overline{\varphi}^*_{t_0}(E^*)$$

$$= \int_{E_m}\int_{E_{m+1}}\cdots\cdots\int_{E_n} P^{(m)}(t_0, dt_m) P(t_m, dt_{m+1}) P(t_{m+1}, dt_{m+2}) \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots P(t_{n-1}, dt_n)$$

$$\overline{\varphi}^*_{t_0}(F^*) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}^*_{t_0}(E_i^*)$$

トオケバ $\overline{\varphi}^*_{t_0}(F^*)$ ハ明カニ $\overline{\mathfrak{F}}^*$ デ定義サレタ finitely additive measure デアル、シカルニ前ト全ク同様ニシテ $\overline{\varphi}^*_{t_0}(F^*)$ が $\overline{\mathfrak{F}}^*$ デ completely additive デアルカラ $\overline{\varphi}^*_{t_0}(F^*)$ ハ又 $\overline{\mathfrak{F}}^*$ ヲ含ム最小ノ Borel family $B(\overline{\mathfrak{F}}^*)$ ニ拡張スルコトが出來ル。シカモコノトキ任意ノ $E^* \in B(\overline{\mathfrak{F}}^*)$ ニ對シテ

$$(\overset{*}{**}) \quad \int_{\Omega} \varphi(dt_0)\, \overline{\varphi}_{t_0}(E^*) = \varphi(E^*)$$

が成立スルコトが容易ニワカル。

次ニ $M(\varphi)$ ニ於ケル Birkhoff ノ ergodic theorem ヲ證明シヨウ。上デ述ベタコトニヨリ Ω^* ニ completely additive ナ measure φ^* ト φ^*-measure preserving ナ Ω^* ノ one-to-one transformation (translation) S トが見ツカッタカラ、$L(\varphi^*)$ ニ關シテ Ω^* 上ニテ ergodic theorem が成立スル。即チ

任意ノ $x^*(t^*) \in L(\varphi^*)$ ニ對シテ $\bar{x}^*(t^*) \in L(\varphi^*)$ が定マツテ

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x^*(S^n(t^*)) \to \bar{x}^*(t^*)$$

φ^*-almost everywhere on Ω^*

トナル。特ニ $x^*(t^*) = x(t_0)$, $t^* = \{t_i^{(i)}\}$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$, $x(t) \in M(\varphi)$ ナルトキハ $x^*(t^*) \in M(\varphi^*) \subset L(\varphi^*)$ トナルカラ $\bar{x}^*(t^*) \in L(\varphi^*)$ (實ハ $\bar{x}^*(t^*) \in M(\varphi^*)$) が見ツカツテ

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(t_n) \longrightarrow \bar{x}^*(t^*)$$

φ^*-almost everywhere on Ω^*

トナル。コノ收斂が成立シナイヨウナ点 t^* ノ集合ヲ E_0^* トセヨ。$E_0^* \in B(\overline{\mathfrak{F}}^*)$ デアルト考ヘテ差支ナイ。ヨツテ今モシ $\bar{\varphi}^*_{t_0}(E_0^*) = 0$ デアレバカヽル $t_0 \in \Omega$ ニ對シテ上式ヲ $\bar{\varphi}^*_{t_0}(E^*)$ ニ關シテ積分スレバ、

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{\Omega}P^{(n)}(t_0, dt_n)x(t_n)$$

$$\longrightarrow \int_{\Omega}\bar{\varphi}^{*}_{t_0}(dt^{*})\bar{x}^{*}(t^{*}) \equiv \bar{x}(t_0)$$

トナル。ヨツテ

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{\Omega}P^{(n)}(t_0, dt_n)x(t_n) \to \bar{x}(t_0)$$

ガ φ-*almost everywhere* ニ成立スルコトヲ証明スルニハ Ω 内ニアル φ-*measure zero* ナ集合 E_0 ガ見ツカツテ $t_0 \bar{\in} E_0$ ナルトキ $\bar{\varphi}^{*}_{t_0}(E_0^{*}) = 0$ トナルコトヲ証明スレバ十分デアル。シカルニコレハ $(\overset{*}{**})$ ヨリ

$$\int_{\Omega}\varphi(dt_0)\bar{\varphi}^{*}_{t_0}(E_0^{*}) = \varphi^{*}(E_0^{*}) = 0$$

トナルコトヨリ殆ンド明カデアル。

コレデ $M(\varphi)$ ニ於ケル *Birkhoff* ノ *ergodic theorem* ノ証明ガ終ル。

§4

本§ニ於テハ *inverse probability* ヲ考ヘル。$P(t, E)$ ガ *stable distribution* $\varphi(E)$ ヲモツトキ

$$\Phi(F, E) = \int_{F}\varphi(dt)P(t, E)$$

トオケバ $\Phi(F, E)$ ハ任意ノ Borel set F, E ニ対シテ定義サレテ

$$\Phi(F, E) \leqq \varphi(E), \quad \Phi(\Omega, E) = \varphi(E)$$

ヲ満足スル，ヨツテ各々ノ F ニ対シテ Borel measurable function $R(F, S)$ が定マツテ

$$\Phi(F, E) = \int_E R(F, S)\, \varphi(ds)$$

トナル. コヽニ $R(F, S)$ ハ各々ノ F ニ對シテ φ-measure 0 ノ集合ヲ除イテ定マリ且ツ $R(\Omega, S) \equiv 1$ デアル。

然ルニ今 Ω ノ Borel 集合全体が φ-measure ニ関シテ separable デアレバ J. V. Neumann-J. L. Doob ノ方法ニヨツテ* $R(F, S)$ が各ノ S ニ対シテ F ニ関シテ completely additive デアルト考ヘテヨイコトがワカル。然ルトキハ $R(F, S)$ ハ又一ツノ Markoff Process ト考ヘルコトが出來ル。

實際 $R(F, S)$ ハ $s \in \Omega$ ナル点が（$P(t, E)$ ナル Markoff Process ニテウゴクトキ）単位時間前ニ F ニアツタ probability ニ外ナラヌ。此ノ如ク考ヘルト吉田氏が考ヘラレタ $f \rightarrow f^{(-1)}$ ナル逆ノ operator ハ實ハ $R(F, S)$ ナル Markoff process ニ関スル正ノ operator ニ外ナラヌコトが ワカル. コノ様ニシテ

---

* コノ方法が可能デアルコトハ吉田氏ノ注意ニヨルモノデアリマス、コヽニ吉田氏ニ対シテ感謝致シマス。

$P(t, E)$ ト $R(F, S)$ トハ全ク *dual* ニナッテキルコトガ示サレル。(實際 $R(F, S)$ ハ又 $\varphi(E)$ ヲ *stable distribution* ニモチ、$R(F, S)$ ノ *inverse* ハ $P(t, E)$ ニナルノデアル)。

コノ *duality* ノ議論ハ *operator-theory* ノ方デ考ヘルト大ヘン面白イノデアルガ、コレハ次ノ機會ニユズルコトニスル。